

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE APPLIQUÉES

PAR  
MARIE-CHRISTINE BÉLANGER

MÉTHODOLOGIES STATISTIQUES POUR LA VÉRIFICATION DE  
RELATIONS D'ORDRE STOCHASTIQUE ENTRE DEUX VARIABLES  
ALÉATOIRES

FÉVRIER 2017

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

## AVANT-PROPOS

En préambule à ce mémoire, je souhaite remercier sincèrement toutes les personnes qui m'ont grandement aidée et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire. Je tiens à remercier mon directeur de recherche, M. Mhamed Mesfioui, ainsi que mon co-directeur de recherche, M. Jean-François Quessy. Tous deux sont professeurs au département de mathématiques et d'informatique à l'Université du Québec à Trois-Rivières. Ils m'ont proposé un sujet intéressant qui m'a fait apprendre plusieurs nouvelles notions et qui m'a aidé à consolider mes connaissances en statistique. Je tiens à les remercier de leur grande patience et de leur écoute. Ils ont été très compréhensifs et m'ont toujours soutenue et bien conseillée et appuyée dans ma conciliation travail-étude. Également, je remercie M. Quessy de m'avoir montré les rudiments de la programmation et de m'avoir permis d'accéder à son ordinateur plus performant, accélérant considérablement le travail à accomplir.

Je désire également remercier ma famille pour son support, tout particulièrement ma mère Denise, qui m'a aidée à surmonter certains moments difficiles dans ce long et fastidieux parcours. Je remercie mes collègues et amis de l'université qui ont été essentiels à un environnement agréable et motivant. Je remercie également Alain Chalifour et Boucif Amar Bensaber d'avoir accepté de lire et d'évaluer mon mémoire. Leurs commentaires constructifs ont permis d'améliorer la qualité de ce travail.

J'aimerais finalement exprimer ma gratitude envers certains organismes pour leur support financier : l'Institut des sciences mathématiques (ISM) et le Conseil de recherche en sciences naturelles et génie du Canada (CRSNG). J'aimerais enfin remercier les membres du Département de mathématiques et d'informatique de l'Université du Québec à Trois-Rivières pour leur encadrement stimulant.

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>v</b>
<b>Table des figures</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Quelques notions préalables</b>	<b>3</b>
1.1 Bref rappel sur les probabilités . . . . .	3
1.2 Variables aléatoires . . . . .	5
1.2.1 Loi d'une variable aléatoire . . . . .	5
1.2.2 Fonction de répartition . . . . .	6
1.2.3 Moments d'une variable aléatoire . . . . .	7
1.3 Quelques lois de probabilité . . . . .	8
1.3.1 Loi normale . . . . .	8
1.3.2 Loi exponentielle . . . . .	10
1.3.3 Loi Beta . . . . .	10
<b>2 Principales notions d'ordre stochastique</b>	<b>12</b>
2.1 L'ordre stochastique usuel . . . . .	13
2.2 Quelques propriétés de l'ordre stochastique usuel . . . . .	14
2.3 Les ordres convexe et concave . . . . .	17

2.4	Les ordres convexe croissant et concave croissant . . . . .	20
2.5	Les ordres stochastiques $s$ -convexes croissants . . . . .	21
2.6	Les ordres stochastiques $s$ -convexes . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Tests statistiques pour les ordres <math>s</math>-convexes</b>	<b>24</b>
3.1	Quelques notions sur les processus empiriques . . . . .	25
3.2	Méthode des multiplicateurs . . . . .	28
3.3	Description de la procédure de test . . . . .	30
3.3.1	Procédure de test pour l'ordre $\prec_{1-icx}$ . . . . .	31
3.3.2	Procédure de test pour l'ordre $\prec_{2-icx}$ . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Étude de la performance des tests par simulations</b>	<b>36</b>
4.1	Carctérisation de l'ordre $\prec_{1-icx}$ pour les lois normale et exponentielle .	36
4.2	Caractérisation de l'ordre $\prec_{2-icx}$ pour les lois normale et exponentielle .	38
4.3	Simulation 1 . . . . .	39
4.4	Simulation 2 . . . . .	41
4.5	Simulation 3 . . . . .	42
	<b>Conclusion</b>	<b>45</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>

# Liste des tableaux

4.1	Proportion de rejet de l'hypothèse nulle pour $X \sim N(\mu, 1)$ et $Y \sim N(0, 1)$ , 10 000 itérations, $s = 1$ . . . . .	40
4.2	Proportion de rejet de l'hypothèse nulle pour $X \sim N(0, \sigma^2)$ et $Y \sim N(0, 1)$ , 10 000 itérations, $s = 1$ . . . . .	41
4.3	Proportion de rejet de l'hypothèse nulle pour $X \sim N(\mu, 1)$ et $Y \sim N(0, 1)$ , 10 000 itérations, $s = 2$ . . . . .	42
4.4	Proportion de rejet de l'hypothèse nulle pour $X \sim N(0, \sigma^2)$ et $Y \sim N(0, 1)$ , 10 000 itérations, $s = 2$ . . . . .	42
4.5	Proportion de rejet de l'hypothèse nulle pour $X \sim \exp(\lambda)$ et $Y \sim \exp(1)$ , 10 000 itérations, $s = 1$ . . . . .	43
4.6	Proportion de rejet de l'hypothèse nulle pour $X \sim \exp(\lambda)$ et $Y \sim \exp(1)$ , 10 000 itérations, $s = 2$ . . . . .	43

# Table des figures

- 1.1 À gauche : densités de la loi normale de moyenne  $\mu = 0$  et d'écart-type  $\sigma = 1$  (ligne pleine),  $\sigma = 2$  (ligne brisée) et  $\sigma = 3$  (trait-point); à droite : densités de la loi normale d'écart-type  $\sigma = 1$  et de moyenne  $\mu = -1$  (ligne pleine),  $\mu = 0$  (ligne brisée) et  $\mu = 1$  (trait-point). . . . . 9
- 1.2 À gauche : fonctions de répartition de la loi normale de moyenne  $\mu = 0$  et d'écart-type  $\sigma = 1$  (ligne pleine),  $\sigma = 2$  (ligne brisée) et  $\sigma = 3$  (trait-point); à droite : fonctions de répartition de la loi normale d'écart-type  $\sigma = 1$  et de moyenne  $\mu = -1$  (ligne pleine),  $\mu = 0$  (ligne brisée) et  $\mu = 1$  (trait-point). . . . . 9
- 1.3 À gauche : densités de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 1$  (ligne pleine),  $\lambda = 2$  (ligne brisée) et  $\lambda = 3$  (trait-point); à droite : fonctions de répartition correspondantes . . . . . 10
- 1.4 À gauche : densités de la loi Beta de paramètres  $\beta = 1$  et  $\alpha = 2$  (ligne pleine),  $\alpha = 3$  (ligne brisée) et  $\alpha = 3$  (trait-point); à droite : fonctions de répartition correspondantes . . . . . 11

# Introduction

Les statistiques et les probabilités sont d'une grande utilité pour décrire, comparer et prédire des événements décrits par des variables aléatoires. Dans plusieurs domaines, notamment en actuariat et en mathématique financière, il peut être intéressant de comparer les risques et d'ordonner des variables aléatoires suivant des lois quelconques avec des critères plus puissants que les statistiques populaires, comme la moyenne et la variance. Les comparaisons basées sur les fonctions de répartition des variables aléatoires donnent de l'information plus précise que les simples statistiques descriptives courantes. La méthode utilisée pour comparer l'ordre de grandeur deux distributions est nommée «ordre stochastique».

L'article de Baringhaus-Grübel [3] propose une méthode permettant d'ordonner deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  représentant deux contrats financiers ou des indemnités d'assurances. Ils s'intéressent au cas général où  $X$  et  $Y$  ne sont pas strictement ordonnés. Ils expliquent dans leur travail que l'ordre stochastique n'est pas suffisant pour comparer les portefeuilles où il y a une notion de risque et que la variabilité devrait, elle aussi, être considérée. Ils utilisent donc l'ordre convexe croissant dans le but d'obtenir une comparaison plus fiable. Ils développent également une méthode de ré-échantillonnage recréant le comportement asymptotique d'une statistique de test et calculent des valeurs critiques en s'appuyant sur la méthode du *bootstrap*.



Ce mémoire est inspiré du travail de Baringhaus et Grübel [3] et a pour but de tester une nouvelle méthode pour établir une statistique de test permettant de déterminer un ordre stochastique entre des variables aléatoires suivant des fonctions de répartition quelconques. La méthode des multiplicateurs sera décrite, expliquée et testée dans ce mémoire.

Dans le chapitre 1, nous faisons un rappel sur les probabilités de base, les variables aléatoires, leur fonctions de répartition et les lois de probabilités associées. Dans le chapitre 2, nous présentons plusieurs notions sur l'ordre stochastique entre deux variables aléatoires et les propriétés utiles. Nous présentons les notions d'ordre convexe, d'ordre convexe croissant et d'ordres  $s$ -convexes croissants. Au chapitre 3, nous présentons les hypothèses et décrivons les étapes pour effectuer les tests statistiques pour ordonner les variables aléatoires. La méthode des multiplicateurs est décrite en détail ainsi que la procédure de test pour  $s=1$  et  $s=2$ . Finalement, dans le chapitre 4, nous testons la performance des tests à l'aide de simulations faites à partir de variables aléatoires ayant des lois de probabilité spécifiques.

# Chapitre 1

## Quelques notions préalables

### 1.1 Bref rappel sur les probabilités

La théorie des probabilités a été développée afin de déterminer le plus précisément possible l'issue d'une expérience aléatoire, c'est-à-dire une expérience dont on ne connaît pas le résultat avec certitude. Les probabilités sont utilisées dans tous les domaines scientifiques, notamment par les compagnies d'assurances, qui cherchent à calculer les probabilités de catastrophes naturelles afin d'ajuster les primes offertes à leurs clients.

Formellement, soit une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possibles est noté  $\Omega$ . L'ensemble  $\Omega$  est appelé l'*espace échantillonal*. Dans ce contexte, la probabilité d'un événement  $A \subseteq \Omega$  est définie par

$$P(A) = \frac{n_A}{N},$$

où  $n_A$  est le nombre de cas favorables de l'événement  $A$  et  $N$  est le nombre de cas possibles. De façon générale, on définit  $P$  comme un opérateur agissant sur les sous-

ensembles de  $\Omega$ . Tel qu'énoncé par Kolmogorov [9] une telle probabilité  $P$  doit satisfaire un ensemble axiomes. Avant de les énoncer, considérons des événements  $A_1, \dots, A_n$  de  $\Omega$ . On notera

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap \dots \cap A_n$$

l'événement où  $A_1, \dots, A_n$  se sont tous produits. De façon semblable,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup \dots \cup A_n$$

est l'événement où au moins un des événements  $A_1, \dots, A_n$  s'est produit. Les axiomes de Kolmogorov s'énoncent comme suit :

- (1)  $P(A) \in [0, 1]$  pour tout événement  $A \subseteq \Omega$  ;
- (2)  $P(\Omega) = 1$  ;
- (3) Si  $A_1, A_2, \dots$  sont tels que  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Plusieurs propriétés se déduisent directement de ces axiomes. Par exemple, si  $A' = \Omega \setminus A$  désigne le complémentaire d'un événement  $A$ , alors  $P(A') = 1 - P(A)$ . Soient maintenant les événements  $A$  et  $B$ . Si  $P(B) > 0$ , alors la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$  est définie par

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Soit les événements  $A_1, \dots, A_n$ , on a alors

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n P(A_i \cap A_j) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &\quad - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

Si  $A_1, \dots, A_n$  sont tels que  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , on démontre que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i|B).$$

Dans le cas particulier où  $A_1, \dots, A_n$  forment une partition de  $\Omega$ , alors la formule de Bayes [2] stipule que pour un événement quelconque  $E$ ,

$$P(A_k|E) = \frac{P(A_k) P(E|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(E|A_i)}.$$

Cette formule découle de la définition de probabilité conditionnelle et de l'identité

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(E|A_i).$$

## 1.2 Variables aléatoires

### 1.2.1 Loi d'une variable aléatoire

Il existe deux types de variables aléatoires, à savoir les variables aléatoires discrètes et les variables aléatoires continues. Une variable aléatoire  $X$  est discrète si les valeurs qu'elle peut prendre appartiennent à un ensemble dénombrable  $\mathcal{X}$ , qu'il soit fini ou infini. Son comportement stochastique est décrit par sa fonction de masse

$$f_X(x) = P(X = x), \quad x \in \mathcal{X}.$$

Une variable aléatoire  $X$  dont l'ensemble des valeurs possibles  $\mathcal{X}$  est non-dénombrable est dite continue. Dans ce cas, le comportement aléatoire de  $X$  est déterminé par sa

fonction de densité  $f_X$  définie sur  $\mathcal{X}$  comme suit

$$\mathbb{P}(X \in \mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} f_X(s) \, ds.$$

### 1.2.2 Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  est définie par

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

De cette définition, il découle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Pour les cas où  $X$  est discrète ou  $X$  est continue, on a respectivement

$$F_X(x) = \sum_{s \in \mathcal{X}: s \leq x} f_X(s) \quad \text{et} \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) \, ds.$$

Dans ce mémoire, nous utiliserons principalement la fonction de survie associée à une variable aléatoire et définie par

$$\bar{F}_X(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x).$$

### 1.2.3 Moments d'une variable aléatoire

L'espérance d'une variable aléatoire  $X$  est la mesure de tendance centrale définie par

$$\mu_X = E(X) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathcal{X}} x f_X(x), & \text{si } X \text{ est discrète;} \\ \int_{\mathcal{X}} x f_X(x) dx, & \text{si } X \text{ est continue.} \end{cases}$$

Plus généralement, l'espérance d'une fonction  $g$  appliquée à  $X$  est définie par

$$E\{g(X)\} = \begin{cases} \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) f_X(x), & \text{si } X \text{ est discrète;} \\ \int_{\mathcal{X}} g(x) f_X(x) dx, & \text{si } X \text{ est continue.} \end{cases}$$

La variance d'une variable aléatoire  $X$  est définie par

$$\sigma_X^2 = \text{var}(X) = E[\{X - E(X)\}^2].$$

La variance est une mesure de la dispersion qui fournit de l'information sur la fluctuation des valeurs par rapport à l'espérance. Plus la variance est petite, moins la distribution est dispersée. Les moments d'ordre supérieur permettent d'extraire des informations intéressantes sur la distribution d'une variable aléatoire. Ainsi, le moment d'ordre  $k \in \mathbb{N}$  d'une variable aléatoire  $X$  est défini par  $\mu_k = E(X^k)$ . On obtient l'espérance lorsque  $k = 1$ . Le moment centré d'ordre  $k \in \mathbb{N}$  est donné par

$$\mu'_k = E\{(X - \mu_X)^k\}.$$

On obtient la variance lorsque  $k = 2$ , c'est-à-dire que  $\mu'_2 = \sigma_X^2$ . Les coefficients d'assymétrie et d'applatissement sont définis à partir des moments centrés d'ordre

$k = 3$  et  $k = 4$ . En effet, le coefficient d'asymétrie est donné par

$$\beta_1 = \mathbb{E} \left\{ \left( \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right)^3 \right\}.$$

On voit facilement que  $\beta_1 = \mu'_3 / \sigma_X^3$ . De façon similaire, le coefficient d'applatissage est défini par

$$\beta_2 = \mathbb{E} \left\{ \left( \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right)^4 \right\},$$

et donc  $\beta_2 = \mu'_4 / \sigma_X^4$ .

## 1.3 Quelques lois de probabilité

### 1.3.1 Loi normale

La densité de la variable aléatoire normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$  est

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dans le cas particulier où  $\mu = 0$  et  $\sigma = 1$ , on parle de la loi normale standard. Quelques exemples de densités  $\phi_{\mu,\sigma}$  sont présentés à la Figure 1.1.

Il est facile de montrer que si  $X \sim \phi_{\mu,\sigma}$ , alors  $\mathbb{E}(X) = \mu$  et  $\text{var}(X) = \sigma^2$ . Ainsi, les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  correspondent à la moyenne et à l'écart-type. On peut aussi montrer que le coefficient d'asymétrie de  $X$  est nul, c'est-à-dire que  $\beta_1 = 0$ ; c'est le cas, par ailleurs, pour toute loi symétrique, car on montre dans ce cas que  $\mu'_3 = \mathbb{E}\{(X - \mu)^3\} = 0$ . Enfin, le coefficient d'applatissage de  $X$  est  $\beta_2 = 3$ . Cette valeur sert souvent de point de repère pour juger si une loi est aplatie ( $\beta_2 > 3$ ) ou arrondie ( $\beta_2 < 3$ ).

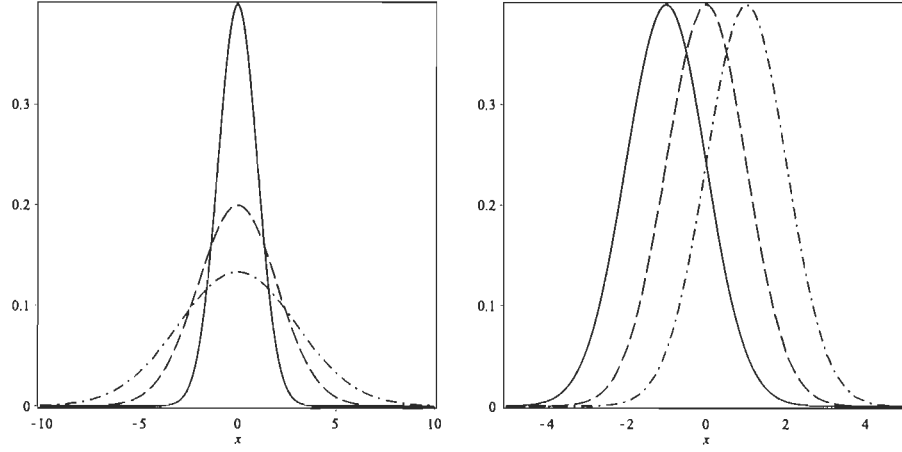


FIGURE 1.1 – À gauche : densités de la loi normale de moyenne  $\mu = 0$  et d'écart-type  $\sigma = 1$  (ligne pleine),  $\sigma = 2$  (ligne brisée) et  $\sigma = 3$  (trait-point) ; à droite : densités de la loi normale d'écart-type  $\sigma = 1$  et de moyenne  $\mu = -1$  (ligne pleine),  $\mu = 0$  (ligne brisée) et  $\mu = 1$  (trait-point).

La fonction de répartition de  $\phi_{\mu,\sigma}$  ne possède pas d'expression explicite. Néanmoins, on peut écrire implicitement

$$\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^x \phi_{\mu,\sigma}(s) \, ds.$$

Un logiciel comme Maple permet de tracer la fonction  $\Phi_{\mu,\sigma}$ . Les fonctions de répartition qui correspondent aux densités de la Figure 1.1 sont présentées à la Figure 1.2.

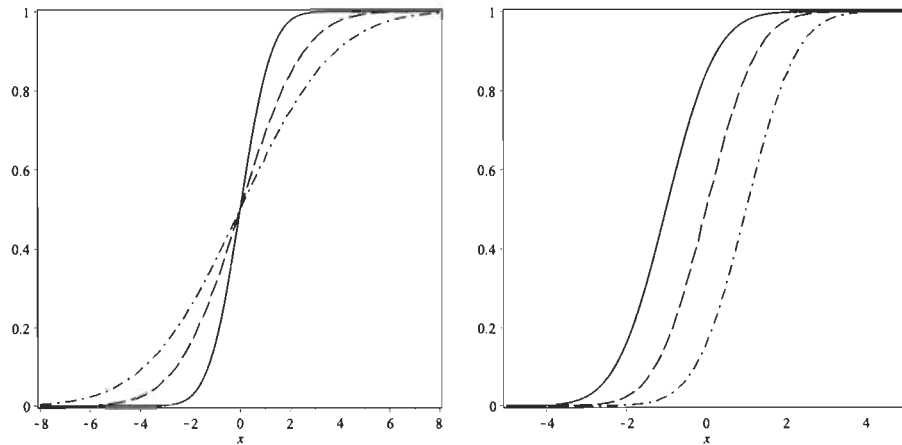


FIGURE 1.2 – À gauche : fonctions de répartition de la loi normale de moyenne  $\mu = 0$  et d'écart-type  $\sigma = 1$  (ligne pleine),  $\sigma = 2$  (ligne brisée) et  $\sigma = 3$  (trait-point) ; à droite : fonctions de répartition de la loi normale d'écart-type  $\sigma = 1$  et de moyenne  $\mu = -1$  (ligne pleine),  $\mu = 0$  (ligne brisée) et  $\mu = 1$  (trait-point).



### 1.3.2 Loi exponentielle

La loi exponentielle est définie sur les nombres réels positifs. Sa densité est

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), \quad x > 0.$$

On montre que si  $X \sim f_\lambda$ , alors  $E(X) = \lambda$  et  $\text{var}(X) = \lambda^2$ . Contrairement à la loi normale, sa fonction de répartition est explicite. En effet, on démontre facilement que

$$F_\lambda(x) = \int_0^x f_\lambda(s) ds = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right).$$

Quelques densités exponentielles et leurs fonctions de répartition correspondantes sont tracées à la Figure 1.3.

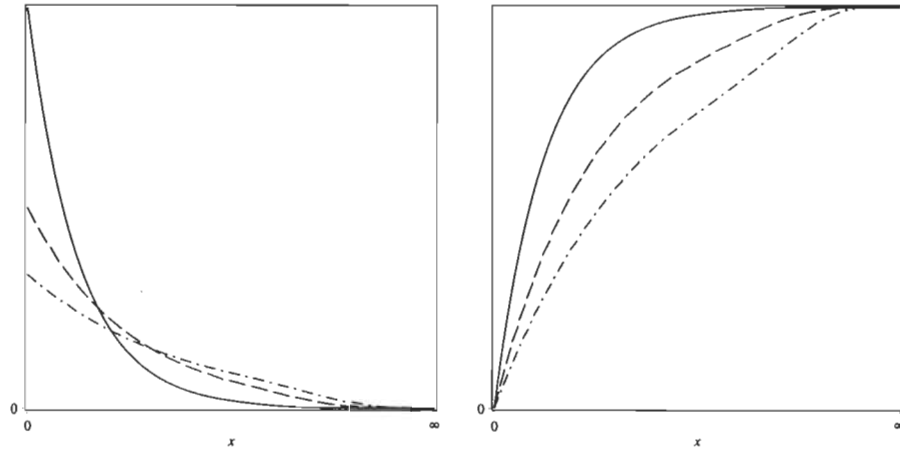


FIGURE 1.3 – À gauche : densités de la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 1$  (ligne pleine),  $\lambda = 2$  (ligne brisée) et  $\lambda = 3$  (trait-point) ; à droite : fonctions de répartition correspondantes

### 1.3.3 Loi Beta

Pour  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , la densité de la loi Beta est donnée par

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0, 1).$$

Dans cette définition,  $\Gamma$  est la fonction Gamma, à savoir

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Dans le cas particulier où  $\beta = 1$ , on a

$$f_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{et} \quad F_\alpha(x) = \int_0^x f_\alpha(s) ds = x^\alpha.$$

Cette densité et sa fonction de répartition correspondante sont tracées à la Figure 1.4.

On montre facilement que si  $X \sim f_\alpha$ , alors

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+1} \quad \text{et} \quad \text{var}(X) = \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)}.$$

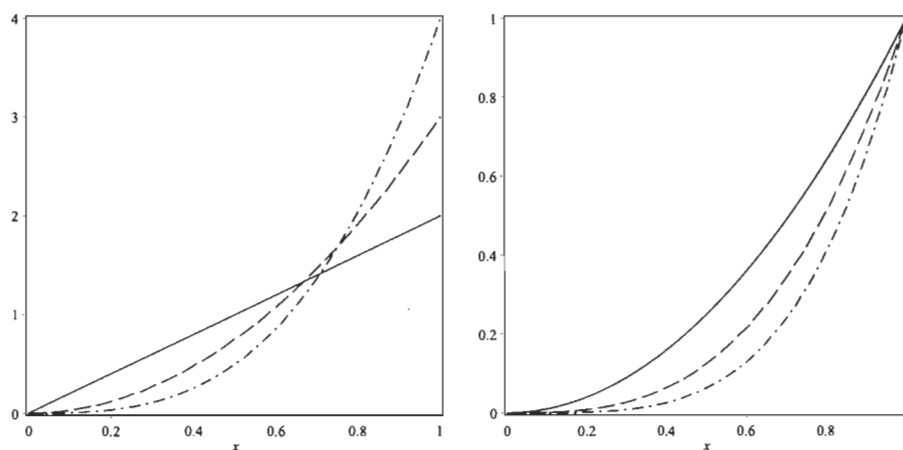


FIGURE 1.4 – À gauche : densités de la loi Beta de paramètres  $\beta = 1$  et  $\alpha = 2$  (ligne pleine),  $\alpha = 3$  (ligne brisée) et  $\alpha = 3$  (trait-point) ; à droite : fonctions de répartition correspondantes

La théorie sur les moments d'ordre sera exploitée au chapitre 2 pour expliquer la notion d'ordre stochastique. Le rappel sur les fonctions de répartitions sera utile au chapitre 3, lors de la description des processus empiriques. Finalement, les lois de probabilités décrites seront utilisées dans les chapitres 3 et 4 pour tester la méthode des multiplicateurs.

## Chapitre 2

# Principales notions d'ordre stochastique

Dans ce chapitre, nous introduisons le concept d'ordre stochastique pour des variables aléatoires. Les ordres stochastiques permettent de comparer les fluctuations et la variabilité des variables aléatoires. Il existe plusieurs niveaux d'ordre convexes ( $s = 1, s = 2$ , etc.) des variables aléatoires qui imposent des conditions de comparaison de plus en plus strictes afin d'obtenir une conclusion satisfaisante sur l'ordonnance stochastique. Dans un premier temps, l'ordre stochastique usuel est défini ainsi que plusieurs de ses propriétés. Par la suite, des types d'ordres stochastiques sont détaillés, à savoir les ordres convexe, convexe croissant,  $s$ -convexe et  $s$ -convexe croissant. Les ordres  $s$ -convexes sont au coeur de la contribution originale de ce mémoire, c'est-à-dire le développement de tests formels pour ces ordres.

## 2.1 L'ordre stochastique usuel

La notion d'ordre stochastique formalise le concept intuitif d'une variable aléatoire *plus grande* qu'une autre. Il s'agit d'une notion plus générale que celle des comparaisons des moyennes et des variances. Précisément, soient les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ayant des fonctions de répartition respectives  $F_X$  et  $F_Y$ . On dit que  $X$  est plus petite que  $Y$  au sens de l'ordre stochastique usuel, noté  $X \prec_{st} Y$ , si pour tout  $u \in \mathbb{R}$ , on a

$$P(X > u) \leq P(Y > u).$$

Puisque  $P(X > u) = 1 - F_X(u)$  et  $P(Y > u) = 1 - F_Y(u)$ , l'équation précédente est équivalente à  $F_X(u) \geq F_Y(u)$ . Pour illustrer cette définition, supposons que  $X$  et  $Y$  sont distribuées selon une loi exponentielle de paramètres respectifs  $\lambda_X$  et  $\lambda_Y$ . Dans ce cas,  $F_X(u) = 1 - e^{-u/\lambda_X}$  et  $F_Y(u) = 1 - e^{-u/\lambda_Y}$ . Alors  $X \prec_{st} Y$  si et seulement si  $\lambda_X \leq \lambda_Y$ . En effet,

$$\begin{aligned} X \prec_{st} Y &\iff F_X(u) \geq F_Y(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^+ \\ &\iff 1 - e^{-u/\lambda_X} \geq 1 - e^{-u/\lambda_Y}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+ \\ &\iff e^{-u/\lambda_X} \leq e^{-u/\lambda_Y}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+ \\ &\iff -\frac{u}{\lambda_X} \leq -\frac{u}{\lambda_Y}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+ \\ &\iff \frac{u}{\lambda_X} \geq \frac{u}{\lambda_Y}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+ \\ &\iff \lambda_X \leq \lambda_Y. \end{aligned}$$

Supposons le cas particulier où  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires discrètes définies sur l'ensemble des entiers naturels. En posant  $p_i = P(X = i)$  et  $q_i = P(Y = i)$ , alors  $X \prec_{st} Y$  si et seulement si pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i \leq N} p_i \leq \sum_{i \leq N} q_i.$$

Supposons par exemple une variable aléatoire  $Y$  telle que

$$P(Y = 1) = 0,1, \quad P(Y = 2) = 0,4 \quad \text{et} \quad P(Y = 3) = 0,5.$$

On désire comparer cette variable aléatoire à  $X$  telle que

$$P(X = 1) = 0,2, \quad P(X = 2) = 0,5 \quad \text{et} \quad P(X = 3) = 0,3.$$

On a  $P(Y \geq 1) = 1$ ,  $P(Y \geq 2) = 0,9$  et  $P(Y \geq 3) = 0,5$ , tandis que  $P(X \geq 1) = 1$ ,  $P(X \geq 2) = 0,8$  et  $P(X \geq 3) = 0,3$ . On vérifie facilement que

$$P(X \geq j) \leq P(Y \geq j), \quad \text{pour tout } j \in \{1, 2, 3\}.$$

Par conséquent, on conclut que  $X \prec_{st} Y$ .

## 2.2 Quelques propriétés de l'ordre stochastique usuel

Parmi les propriétés de l'ordre stochastique usuel, on a que si  $X \prec_{st} Y$ , alors  $E(X) \leq E(Y)$ . On peut également montrer que si  $X \prec_{st} Y$  et  $E(X) = E(Y)$  alors  $X$  et  $Y$  sont identiquement distribuées. On peut également récrire cette inégalité à l'aide des espérances de fonctions indicatrices. Soit la fonction indicatrice d'un ensemble  $A \subseteq \mathbb{R}$  définie par

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

On a que si  $X \prec_{st} Y$ , alors pour tout sous-ensemble  $A$  de l'intervalle  $(u, \infty)$ ,

$$E\{\mathbb{I}_A(X)\} \leq E\{\mathbb{I}_A(Y)\}.$$

À noter que si  $X \sim f_X$ , alors par définition,

$$\mathbb{E}\{\mathbb{I}_A(X)\} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_A(x) f_X(x) dx = \int_A f_X(x) dx = P(X \in A).$$

Par conséquent,  $\mathbb{E}\{\mathbb{I}_A(X)\} \leq \mathbb{E}\{\mathbb{I}_A(Y)\}$  est équivalent à  $P(X \in A) \leq P(Y \in A)$ .

À noter que la fonction indicatrice est un cas particulier d'une fonction croissante. On peut montrer, de façon beaucoup plus générale, que pour toute fonction croissante  $\phi$ , on a  $X \prec_{st} Y$  si et seulement si  $\mathbb{E}\{\phi(X)\} \leq \mathbb{E}\{\phi(Y)\}$ . Bien entendu, ce résultat a un sens en autant que les espérances existent. On peut démontrer également certaines propriétés dites *de fermeture*. En effet,

- (i) si  $X \prec_{st} Y$ , alors  $f(X) \prec_{st} f(Y)$  pour toute fonction croissante  $f$  ;
- (ii) si  $X \prec_{st} Y$ , alors  $f(X) \prec_{st} f(Y)$  pour toute fonction décroissante  $f$ .

Soient maintenant deux ensembles de variables aléatoires indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  et  $Y_1, \dots, Y_n$  telles que  $X_i \prec_{st} Y_i$  pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Alors pour toute fonction  $n$ -dimensionnelle  $\psi$  qui est croissante selon chacun de ses arguments, on a

$$\psi(X_1, \dots, X_n) \prec_{st} \psi(Y_1, \dots, Y_n).$$

En particulier, lorsque  $\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)/n$ , on a

$$\bar{X}_n \prec_{st} \sum_{i=1}^n \bar{Y}_n.$$

Par exemple, la valeur d'un portefeuille financier est la somme de ses actifs. Ainsi, un portefeuille  $P_1$  sera stochastiquement dominé par un portefeuille  $P_2$  si chacune des composantes (actifs) de même indice sont stochastiquement ordonnées selon l'ordre usuel.

De plus, la propriété de fermeture par mélanger est vérifiée. Il s'agit ici de comparer les variables aléatoires en les soumettant à une condition commune. Soient donc trois variables aléatoires  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  telles que  $(X|Z = \theta) \prec_{st} (Y|Z = \theta)$ . On a alors que

$X \prec_{st} Y$ . Par exemple, les variables  $X$  et  $Y$  pourraient représenter, respectivement, les populations du Canada et des États-Unis, et  $Z$  pourrait être la variable binaire telle que  $Z = 1$  dans le cas d'un homme et  $Z = 0$  pour une femme. On pourrait alors faire une comparaison des deux pays étant données les catégories *Homme* et *Femme*.

Il y a une deuxième propriété de fermeture par mixture. Soient  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , deux suites de variables aléatoires indépendantes. Soient aussi  $M$  et  $N$ , des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Alors si  $M \prec_{st} N$  et si  $X_i \prec_{st} Y_i$  pour chaque  $i \in \mathbb{N}$ , alors

$$\sum_{i=1}^M X_i \prec_{st} \sum_{i=1}^N Y_i.$$

Finalement, la propriété des bornes au sens stochastique est aussi respectée. Si on a une variable aléatoire dont on ne connaît pas la distribution mais dont la moyenne  $\mu$  et la variance  $\sigma^2$  sont connues, alors il existe des bornes pour  $X$  telles que

$$X_{\min, \mu, \sigma} \prec_{st} X \prec_{st} X_{\max, \mu, \sigma},$$

où les fonctions de répartition de  $X_{\min, \mu, \sigma}$  et de  $X_{\max, \mu, \sigma}$  sont respectivement

$$F_{\min, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \mu, \\ \frac{x - \mu}{x} & \text{si } \mu \leq x \leq \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu}, \\ \frac{(x - \mu)^2}{(x - \mu)^2 + \sigma^2} & \text{si } x > \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu}. \end{cases}$$

et

$$F_{\max, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{(x - \mu)^2 + \sigma} & \text{si } 0 \leq x \leq \mu, \\ 1 & \text{si } x > \mu. \end{cases}$$

Pour plus de détails, consulter [11]

## 2.3 Les ordres convexe et concave

Dans cette section, nous allons étudier les ordres stochastiques convexe et concave. Ceux-ci sont utiles en pratique car ils permettent de comparer la variabilité de deux variables aléatoires. Considérons deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , alors  $X$  est plus petite que  $Y$  au sens de l'ordre convexe (concave) si pour toute fonction convexe (concave)  $\phi$ , et on note  $X \prec_{cx} Y$  ( $X \prec_{cv} Y$ ,

$$E\{\phi(X)\} \leq E\{\phi(Y)\}.$$

On rappelle qu'une fonction convexe est caractérisée par une dérivée seconde positive. Plus formellement, soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Alors  $f$  est convexe sur  $I$  si pour tout  $x, y \in I$ , on a

$$f\{tx + (1-t)y\} \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad \text{pour chaque } t \in (0,1).$$

Dans le cas où l'inégalité précédente est stricte, on dit que  $f$  est strictement convexe. La concavité peut se définir à partir de la notion de convexité. En effet, on dit que  $f$  est concave si  $-f$  est convexe.

La notion d'ordre convexe présente plusieurs propriétés intéressantes. D'abord, un théorème stipule qu'en présence de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  telles que  $E(Y|X) = X$ , alors  $X \prec_{cx} Y$ . En effet, pour toute variable aléatoire  $X$  et  $Y$  et une fonction convexe quelconque  $\phi$ ,

$$\begin{aligned} E\{\phi(X)\} &= E[\phi\{E(Y|X)\}] \\ &\leq E[E\{\phi(Y)|X\}] \quad (\text{inégalité de Jensen}) \\ &= E\{\phi(Y)\}, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que  $X \prec_{cx} Y$ . Pour en de plus amples renseignements sur



l'inégalité de Jensen, consulter [8].

On peut appliquer le résultat précédent en considérant l'ordre convexe entre des moyennes de variables aléatoires. Soient  $X_1, \dots, X_n$ , des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Si  $\bar{X}_{n-1}$  est la moyenne de  $X_1, \dots, X_{n-1}$  et  $\bar{X}_n$  la moyenne de  $X_1, \dots, X_n$ , alors

$$\bar{X}_n \prec_{cx} \bar{X}_{n-1}.$$

Selon les propriétés ci-haut, cela implique que

$$\text{var}(\bar{X}_n) < \text{var}(\bar{X}_{n-1}).$$

On en déduit que  $\bar{X}_n$  est un meilleur estimateur de la moyenne que  $\bar{X}_{n-1}$ .

De plus, puisque les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes et identiquement distribuées, il s'ensuit que

$$\text{E}(X_1|\bar{X}_n) = \dots = \text{E}(X_n|\bar{X}_n).$$

De là,

$$\begin{aligned} \bar{X}_n &= \text{E}(\bar{X}_n|\bar{X}_n) \\ &= \text{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \middle| \bar{X}_n\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{E}(X_i|\bar{X}_n) \\ &= \text{E}(X_i|\bar{X}_n), \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

De plus,  $\text{E}(X_i|\bar{X}_n) = \text{E}(\bar{X}_{n-1}|\bar{X}_n)$ , donc  $\text{E}(\bar{X}_{n-1}|\bar{X}_n) = \bar{X}_n$ .

Dans ce cas, la moyenne  $\bar{X}_n$  est aussi la moyenne pondérée des variables aléatoires

$X_i$ . En effet, soient des poids non-négatifs  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ . Alors

$$\bar{X}_n \prec_{cx} \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i.$$

Ce résultat se généralise à la variance, à savoir que

$$\text{var}(\bar{X}_n) \leq \text{var}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\right).$$

Ainsi, pour minimiser la variabilité de l'estimateur  $\bar{X}_n$ , il faut que

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n},$$

soit la moyenne empirique  $\bar{X}_n$ .

Un autre résultat de l'ordre stochastique convexe d'une variable aléatoire  $X$  dont l'espérance existe est ;

$$X + E(X) \prec_{cx} 2X.$$

Une autre propriété importante qui implique l'espérance de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ordonnées au sens de l'ordre convexe est que si  $X \prec_{cx} Y$  alors  $E(X) = E(Y)$ . Il est facile de démontrer ce résultat en notant d'abord que, par définition de l'ordre convexe,  $E\{\phi(X)\} \leq E\{\phi(Y)\}$ . En prenant ensuite les fonctions convexes  $\phi(x) = x$  et  $\phi(-x)$ , on déduit que  $E(X) \leq E(Y)$  et  $E(Y) = E(X)$ , ce qui implique que  $E(X) = E(Y)$ .

Il existe également une propriété sur les variances de deux variables aléatoires ordonnées selon l'ordre convexe. En effet, si  $X \prec_{cx} Y$ , alors  $\text{var}(X) \leq \text{var}(Y)$ . En effet, si on pose  $\phi(x) = x^2$ , alors comme  $E(X) = E(Y)$ , on a

$$\begin{aligned} X \prec_{cx} Y &\Rightarrow E(X^2) \leq E(Y^2) \\ &\Rightarrow E(X^2) - \{E(X)\}^2 \leq E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 \\ &\Rightarrow \text{var}(X) \leq \text{var}(Y). \end{aligned}$$

Si on note  $x_+ = \max(x, 0)$ , alors  $X \prec_{cx} Y$  si et seulement si pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{E} \{(X - a)_+\} \leq \mathbb{E} \{(Y - a)_+\}.$$

On a également que  $X \prec_{cx} Y$  si et seulement si

$$\int_a^\infty \bar{F}_X(x) dx \leq \int_a^\infty \bar{F}_Y(x) dx.$$

Aussi,  $X \prec_{cx} Y$  si et seulement si

$$\int_{-\infty}^a F_X(x) dx \leq \int_{-\infty}^a F_Y(x) dx.$$

Cette propriété est utile pour comparer deux membres d'une même famille de lois paramétrique. Enfin, on peut montrer que pour  $X_1, \dots, X_n$  et  $Y_1, \dots, Y_n$  telles que  $X_i \prec_{cx} Y_i$  pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$  alors  $\bar{X}_n \prec_{cx} \bar{Y}_n$ .

## 2.4 Les ordres convexe croissant et concave croissant

Lorsque l'ordre convexe (concave) devient trop contraignant, notamment au niveau des exigences des moyennes des v.a.  $X$  et  $Y$ , on se tourne vers l'ordre convexe croissant (concave croissant). Par définition, on dit que  $X$  est plus petite que  $Y$  au sens de l'ordre convexe croissant, noté  $X \prec_{icx} Y$ , si pour toute fonction  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexe et croissante, on a

$$\mathbb{E} \{\phi(X)\} \leq \mathbb{E} \{\phi(Y)\}.$$

Cette définition s'étend à l'ordre concave croissant. On dit alors que  $X$  est plus petite que  $Y$  au sens de l'ordre concave croissant, noté  $X \prec_{icv} Y$ , si pour toute fonction  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est concave et croissante,

$$\mathbb{E} \{\phi(X)\} \leq \mathbb{E} \{\phi(Y)\}.$$

À noter que  $\phi$  est convexe et croissante si et seulement si  $\tilde{\phi}(x) = -\phi(-x)$  est une fonction concave et croissante sur  $\mathbb{R}$ .

En particulier, comme la fonction  $\phi(x) = x$  est strictement croissante, il s'ensuit que  $X \prec_{icx} Y$  entraîne l'ordonnancement des moyennes, à savoir que  $E(X) \leq E(Y)$ . C'est la différence qui distingue l'ordre convexe et l'ordre convexe croissant. En effet, on ne peut pas utiliser les propriétés d'ordre convexe croissant avec  $\psi(x) = -x$ , puisque cette fonction n'est pas croissante. De plus, on ne peut rien dire concernant les variances puisque la fonction  $x^2$  n'est pas strictement croissante pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Soient maintenant  $X$  et  $Y$ , deux variables aléatoires. Alors  $X \prec_{icx} Y$  si et seulement si  $Y \prec_{icv} -X$ . Ainsi, on pourrait se contenter de décrire les propriétés de l'ordre convexe croissant uniquement, puisque leurs versions équivalentes pour l'ordre concave croissant en découlent. On a également que  $X \prec_{icx} Y$  si et seulement si

$$E\{(X - a)_+\} \leq E\{(Y - a)_+\}.$$

Enfin, on note que l'ordre convexe croissant est plus fort que l'ordre convexe car si  $X \prec_{icx} Y$ , alors  $X \prec_{cx} Y$ . L'implication contraire n'est pas vraie en général.

## 2.5 Les ordres stochastiques $s$ -convexes croissants

Pour tout  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$  et  $s \in \mathbb{N}_0$ , on définit l'ensemble  $\mathcal{U}_{s-icx}$  des fonctions  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que pour chaque  $\ell \in \{1, \dots, s\}$ , on a

$$\frac{d^\ell f(x)}{dx^\ell} \geq 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A}.$$

Soient maintenant deux variables aléatoires continues  $X$  et  $Y$ . On dit que  $X$  est inférieure à  $Y$  au sens de l'ordre  $s$ -convexe croissant, et on note  $X \prec_{s-icx} Y$ , si pour

tout  $f \in \mathcal{U}_{s-icx}$ ,

$$\mathbb{E}\{f(X)\} \leq \mathbb{E}\{f(Y)\}.$$

Une caractérisation importante de cet ordre est que  $X \prec_{s-icx} Y$  si et seulement si  $\mathbb{E}(X^\ell) \leq \mathbb{E}(Y^\ell)$  pour tout  $\ell \in \{1, \dots, s-1\}$  et

$$\mathbb{E}\{(X-t)_+^{s-1}\} \leq \mathbb{E}\{(Y-t)_+^{s-1}\}, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

À noter que lorsque  $s = 1$ , on retrouve l'ordre usuel, c'est-à-dire que  $X \prec_{1-icx} Y$  est équivalent à  $\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Quand  $s = 2$ , on retrouve l'ordre convexe croissant, c'est-à-dire que  $X \prec_{2-icx} Y$  est équivalent à  $\mathbb{E}\{(X-t)_+\} \leq \mathbb{E}\{(Y-t)_+\}$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .

Remarquons que l'ordre convexe croissant est un cas particulier de l'ordre  $s$ -convexe, décrit ci-dessous, avec  $s = 2$ .

## 2.6 Les ordres stochastiques $s$ -convexes

Pour tout  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$  et  $s \in \mathbb{N}_0$ , on définit l'ensemble  $\mathcal{U}_{s-cx}$  des fonctions  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  dont la dérivée d'ordre  $s$  est non-négative, c'est-à-dire que

$$\frac{d^s f(x)}{dx^s} \geq 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{A}.$$

Soient maintenant deux variables aléatoires continues  $X$  et  $Y$ . On dit que  $X$  est inférieure à  $Y$  au sens de l'ordre  $s$ -convexe, en on note  $X \prec_{s-cx} Y$ , si pour tout  $f \in \mathcal{U}_{s-cx}$ ,

$$\mathbb{E}\{f(X)\} \leq \mathbb{E}\{f(Y)\}.$$

Une caractérisation importante de cet ordre est que  $X \prec_{s-cx} Y$  si et seulement si  $E(X^\ell) = E(Y^\ell)$  pour tout  $\ell \in \{1, \dots, s-1\}$  et

$$E\{(X-t)_+^{s-1}\} \leq E\{(Y-t)_+^{s-1}\}.$$

## Chapitre 3

# Tests statistiques pour les ordres $s$ -convexes

L'objectif principal de ce chapitre est d'élaborer une procédure permettant de tester des hypothèses concernant les ordres stochastiques de type  $s$ -convexe. Plus spécifiquement, soient les hypothèses nulle et alternative

$$\mathcal{H}_0^s : X \prec_{s-icx} Y \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_1 : X \not\prec_{s-icx} Y.$$

Afin d'établir une telle procédure, il faut d'abord décrire quelques outils issus de la théorie des processus empiriques. Notamment, la méthode des multiplicateurs pour les processus empiriques sera décrite. Cette technique s'avérera très utile pour le calcul des  $p$ -valeurs des tests.

### 3.1 Quelques notions sur les processus empiriques

Soit un échantillon  $X_1, \dots, X_n$  d'observations indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que ces observations ont la même fonction de répartition  $F$ . La fonction de répartition empirique est définie par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i \leq x).$$

La fonction empirique  $F_n(x)$  est un estimateur de  $F(x)$ . On montre facilement que

$$\mathbb{E}\{F_n(x)\} = F(x) \quad \text{et} \quad \text{var}\{F_n(x)\} = \frac{F(x)\{1 - F(x)\}}{n}.$$

Pour un  $x$  fixé, on constate que  $F_n(x)$  est la proportion des observations qui sont inférieures à  $x$ . Le Théorème de la limite centrale de Moivre (voir par exemple [5]) assure que

$$\mathbb{F}_n(x) = \sqrt{n}\{F_n(x) - F(x)\}$$

converge en loi vers la distribution normale de moyenne zéro et de variance  $F(x)\{1 - F(x)\}$ . Le Théorème de Glivenko–Cantelli, [4], est un résultat de type convergence uniforme concernant le comportement asymptotique de  $F_n$ . Il stipule que l'estimateur  $F_n$  est uniformément convergent pour  $F$  au sens où

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$$

converge en probabilité vers 0. D'autre part, un résultat de [6] permet de caractériser le comportement asymptotique en loi de  $\mathbb{F}_n(x)$  vue comme une fonction aléatoire. Dans ce cas, on dit que  $\mathbb{F}_n(x)$  est un processus empirique. Pour décrire ce résultat, on définit d'abord  $D(\mathbb{R})$ , l'espace des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  qui sont continues à droite et qui possèdent une limite à gauche en tout point. Alors,  $\mathbb{F}_n$  converge en loi dans l'espace  $D(\mathbb{R})$  vers un processus de représentation  $\mathbb{F}(x) = \mathbb{B}\{F(x)\}$ , où  $\mathbb{B}$  est un pont Brownien. On rappelle qu'un pont Brownien  $\mathbb{B}$  est une fonction aléatoire définie sur



$[0, 1]$  telle que  $\mathbb{B}(0) = \mathbb{B}(1) = 0$  [7]. De plus, un pont brownien est centré, c'est-à-dire que  $E\{\mathbb{B}(t)\} = 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$  et sa fonction de covariance est donnée pour tout  $s, t \in [0, 1]$  par

$$\text{cov}\{\mathbb{B}(s), \mathbb{B}(t)\} = \min(s, t) - s t.$$

En particulier,

$$\text{var}\{\mathbb{B}(s)\} = \text{cov}\{\mathbb{B}(s), \mathbb{B}(s)\} = s(1 - s).$$

Par conséquent, puisque  $\mathbb{F}(x) = \mathbb{B}\{F(x)\}$ , on déduit facilement que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$E\{\mathbb{F}(x)\} = 0 \quad \text{et} \quad \text{var}\{\mathbb{F}(x)\} = F(x)\{1 - F(x)\}.$$

De plus, pour tout  $x, x' \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{cov}\{\mathbb{F}(x), \mathbb{F}(x')\} = \min\{F(x), F(x')\} - F(x)F(x').$$

L'utilité principale des processus empiriques est de retrouver le comportement asymptotique de statistiques qui s'écrivent en fonction de  $F_n$ . Une illustration concernant la moyenne empirique est présentée dans la suite.

**Exemple 3.1.** Soit une variable aléatoire positive  $X$  de loi  $F$ . Dans ce cas, on a

$$E(X) = \int_0^\infty \{1 - F(x)\} dx.$$

Soient aussi des *copies* de  $X$ , c'est-à-dire un échantillon  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $F$ . On sait qu'un estimateur sans biais de  $E(X)$  est la moyenne empirique  $\bar{X}_n$ . On montre que

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \int_0^\infty \{1 - F_n(x)\} dx.$$

Par conséquent, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sqrt{n} \{ \bar{X}_n - E(X) \} &= \sqrt{n} \left[ \int_0^\infty \{1 - F_n(x)\} dx - \int_0^\infty \{1 - F(x)\} dx \right] \\ &= - \int_0^\infty \mathbb{F}_n(x) dx.\end{aligned}$$

Par le Théorème des applications continues dont une description détaillée se retrouve dans [12], on conclut que  $\mathbb{Z}_n = \sqrt{n} \{ \bar{X}_n - E(X) \}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $\mathbb{Z}$  de représentation

$$\mathbb{Z} = - \int_0^\infty \mathbb{B} \{ F(x) \} dx.$$

Puisque  $\mathbb{Z}$  s'écrit comme une intégrale d'un processus de type gaussien, cette variable aléatoire est une loi normale. De plus, on montre facilement que

$$\begin{aligned}E(\mathbb{Z}) &= E \left[ - \int_0^\infty \mathbb{B} \{ F(x) \} dx \right] \\ &= - \int_0^\infty E [\mathbb{B} \{ F(x) \}] dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dans les égalités précédentes, on a utilisé le Théorème de Fubini afin d'intervertir l'ordre des opérateurs *espérance* et *intégrale*. Enfin,

$$\begin{aligned}\text{var}(\mathbb{Z}) &= \text{var} \left[ - \int_0^\infty \mathbb{B} \{ F(x) \} dx \right] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \text{cov} [\mathbb{B} \{ F(x) \}, \mathbb{B} \{ F(x') \}] dx dx' \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty [\min \{ F(x), F(x') \} - F(x) F(x')] dx dx' .\end{aligned}$$

Cette dernière expression correspond à la variance  $\sigma_F^2$  de la loi  $F$ . Par conséquent, on a démontré que  $\mathbb{Z}_n$  converge vers une loi normale de moyenne nulle et de variance  $\sigma_F^2$ . Il s'agit en fait du Théorème central limite.

## 3.2 Méthode des multiplicateurs

Pour tester les hypothèses des tests mentionnés au début du présent chapitre, nous aurons besoin d'une méthode de ré-échantillonnage appropriée. Celle-ci sera basée sur la technique des *bootstrap* multiplicateurs. Cette procédure permet de reproduire le comportement asymptotique d'une statistique de test. Elle est notamment fort utile pour calculer la valeur critique de tests statistiques dans des situations où la distribution est inconnue sous l'hypothèse nulle.

Les *multiplicateurs* sont des vecteurs aléatoires indépendants

$$\left(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}\right), \dots, \left(\xi_1^{(M)}, \dots, \xi_n^{(M)}\right)$$

tels que pour chaque  $h \in \{1, \dots, M\}$ , les variables aléatoires  $\xi_1^{(h)}, \dots, \xi_n^{(h)}$  sont indépendantes, positives et telles que

$$\mathbb{E} \left( \xi_i^{(h)} \right) = \text{var} \left( \xi_i^{(h)} \right) = 1.$$

Un cas particulier est celui où  $\xi_i^{(h)}$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 1$ . Selon [10], la méthode des multiplicateurs dans ce cas particulier s'appelle le *bootstrap bayésien*.

Pour décrire la méthode dans le cas de la moyenne empirique, soit un échantillon  $X_1, \dots, X_n$  de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et telles que  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$  et  $\text{var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ . Sous ces conditions, on sait que  $Z_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$  converge en loi vers la distribution  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Ce résultat classique est énoncé, entre autres, dans [5]. On peut reproduire ce comportement limite à l'aide de la méthode des multiplicateurs. Pour ce faire, on pose pour chaque

$h \in \{1, \dots, M\}$ ,

$$Z_n^{(h)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} (X_i - \bar{X}_n),$$

où  $\bar{\xi}^{(h)} = (\xi_1^{(h)} + \dots + \xi_n^{(h)})/n$ . Suite à quelques manipulations algébriques simples, on montre que

$$Z_n^{(h)} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\xi_i^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} - 1 \right) X_i.$$

Le résultat suivant établit la validité de la méthode des multiplicateurs. On en retrouve la démonstration dans [10].

**Théorème 3.1.** *Le vecteur  $(Z_n, Z_n^{(1)}, \dots, Z_n^{(M)})$  converge en loi vers  $(Z, Z^{(1)}, \dots, Z^{(M)})$ , où  $Z^{(1)}, \dots, Z^{(M)}$  sont des copies indépendantes de la variable aléatoire  $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .*

L'extension multidimensionnelle de la méthode dans  $\mathbb{R}^d$  est assez directe. Dans ce cas, l'échantillon est composé de vecteurs aléatoires  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  indépendants et identiquement distribués à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . On note  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ , le vecteur moyenne commun à chaque observation, c'est-à-dire que  $E(\mathbf{X}_1) = \dots = E(\mathbf{X}_n) = \boldsymbol{\mu}$ . De même, on note  $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ , la matrice de variance-covariance, où pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\Sigma_{\ell\ell'} = \text{cov}(X_{i\ell}, X_{i\ell'})$ . La moyenne empirique est le vecteur

$$\bar{\mathbf{X}}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i.$$

Du théorème central limite  $d$ -dimensionnel, on sait que  $\mathbf{Z}_n = \sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu})$  converge vers la loi normale à  $d$  dimensions de moyenne  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$  et de matrice de variance-covariance  $\Sigma$ . Les multiplicateurs de  $\mathbf{Z}_n$  sont données par

$$\mathbf{Z}_n^{(h)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\xi_i^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} - 1 \right) \mathbf{X}_i.$$

Une version multidimensionnelle du Théorème 3.1 peut maintenant être énoncée.

**Théorème 3.2.** *Le vecteur  $(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_n^{(1)}, \dots, \mathbf{Z}_n^{(M)})$  converge en loi vers  $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^{(1)}, \dots, \mathbf{Z}^{(M)})$ ,*

où  $\mathbf{Z}^{(1)}, \dots, \mathbf{Z}^{(M)}$  sont des copies indépendantes de la variable aléatoire  $\mathbf{Z}$  de loi normale à  $d$  dimensions de moyenne  $\mathbf{0}$  et de matrice de variance-covariance  $\Sigma$ .

Maintenant, on peut établir la validité de la méthode des multiplicateurs dans le cadre beaucoup plus large des processus empiriques. Soient donc des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes et identiquement distribuées à valeur dans  $\mathbb{R}^d$ . Si  $F$  est leur fonction de répartition commune, alors on a vu que le processus  $\mathbb{F}_n(x) = \sqrt{n}\{F_n(x) - F(x)\}$  converge en loi vers un processus limite de la forme  $\mathbb{B}\{F(x)\}$ , où  $\mathbb{B}$  est un pont brownien. Les versions multiplicateurs de  $\mathbb{F}_n$  sont définies par

$$\mathbb{F}_n^{(h)}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\xi_i^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} - 1 \right) \mathbb{I}(X_i \leq x).$$

La validité de cette méthode est démontrée au théorème suivant. Encore une fois, la démonstration se retrouve dans l'ouvrage de [10].

**Théorème 3.3.** *Le vecteur  $(\mathbb{F}_n, \mathbb{F}_n^{(1)}, \dots, \mathbb{F}_n^{(M)})$  converge en loi vers  $(\mathbb{F}, \mathbb{F}^{(1)}, \dots, \mathbb{F}^{(M)})$ , où  $\mathbb{F}^{(1)}, \dots, \mathbb{F}^{(M)}$  sont des copies indépendantes de  $\mathbb{F}(x) = \mathbb{B}\{F(x)\}$ .*

### 3.3 Description de la procédure de test

Rappelons que notre but principal est d'établir une procédure permettant de tester l'ordre usuel  $\prec_{1-icx}$  et l'ordre convexe croissant  $\prec_{2-icx}$  présentés au chapitre 2. Plus spécifiquement, nous proposons une méthode permettant de tester les hypothèses suivantes :

$$\mathcal{H}_0 : X \prec_{1-icx} Y \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_1 : X \not\prec_{1-icx} Y \quad (3.1)$$

et

$$\mathcal{H}_0 : X \prec_{2-icx} Y \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_1 : X \not\prec_{2-icx} Y. \quad (3.2)$$

Dans un premier temps, nous présentons la démarche statistique permettant de tester les hypothèses relatives à l'ordre  $\prec_{1-icx}$ .

### 3.3.1 Procédure de test pour l'ordre $\prec_{1-icx}$

Soient  $X_1, \dots, X_n$  et  $Y_1, \dots, Y_n$  deux échantillons indépendants de fonction de répartition  $F$  et  $G$ , respectivement. Considérons les processus empiriques suivants :

$$\bar{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i > t) \quad \text{et} \quad \bar{G}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Y_i > t).$$

La statistique du test utilisée sera celle de Kolmogorov-Smirnov [9] définie par

$$K_n = \sqrt{n} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\bar{F}_n(t) - \bar{G}_n(t)|. \quad (3.3)$$

Considérons maintenant les statistiques  $K_n^{(h)}$ ,  $h = 1, \dots, M$  simulées à l'aide de la méthode des multiplicateurs étudiée au chapitre précédent à savoir

$$K_n^{(h)} = \sqrt{n} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\bar{F}_n^{(h)}(t) - \bar{G}_n^{(h)}(t)| \quad (3.4)$$

où

$$\bar{F}_n^{(h)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\xi_i^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} - 1 \right) \mathbb{I}(X_i > x)$$

et

$$\bar{G}_n^{(h)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\xi_i^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} - 1 \right) \mathbb{I}(Y_i > x).$$

Ces statistiques interviennent dans le calcul de la valeur critique utilisée pour prendre une décision par rapport au rejet ou non de  $\mathcal{H}_0$ .

**Calcul de la valeur critique du test sur l'ordre  $\prec_{1-icx}$** 

L'erreur de première espèce est utilisée pour déterminer avec exactitude la probabilité de rejeter de l'hypothèse nulle  $\mathcal{H}_0$  alors que celle-ci est vraie. La valeur critique, quant à elle, est basée sur la statistique de test et aide à poser un diagnostic sur le rejet ou non de  $\mathcal{H}_0$ . Si la valeur critique est inférieure à un seuil de signification  $\alpha$  donné, on dit alors que le résultat est statistiquement significatif, c'est-à-dire que les écarts observés ne sont pas seulement dûs au hasard. On rejette alors l'hypothèse nulle.

L'évaluation de la valeur critique associée au test d'hypothèse (3.1) est basée sur la statistique de test de Kolmogorov-Smirnov  $K_n$  définie par la formule (3.3) ainsi que les statistiques  $K_n^{(1)}, \dots, K_n^{(M)}$  simulées par la méthode des multiplicateurs données par la formule (3.4). La valeur critique est donnée par la formule suivante :

$$p = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^M \mathbb{I}(K_n^{(h)} > K_n).$$

Nous résumons ci-dessous les étapes principales permettant d'obtenir la valeur critique relative au test (3.1) ;

- Étape 1 : calculer la statistique de test  $K_n$  à partir d'échantillons  $X$  et  $Y$  réels :

$$K_n = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\bar{F}_n(t) - \bar{G}_n(t)|$$

,

- Étape 2 : simuler à l'aide de la méthode des multiplicateurs la statistique suivante ;

$$K_n^{(h)} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\bar{F}_n^{(h)}(t) - \bar{G}_n^{(h)}(t)|, \quad h = 1, \dots, M$$

,

- Étape 3 : calculer la valeur critique en effectuant la comparaison suivante ;

$$p = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \mathbb{I}(K_n^{(h)} > K_n)$$

- Étape 4 : prendre la décision du rejet ou non de  $\mathcal{H}_0$ .

Nous allons maintenant décrire la procédure permettant de valider les hypothèses de test (3.2). La démarche est similaire à celle exposée à la section précédente.

### 3.3.2 Procédure de test pour l'ordre $\prec_{2-icx}$

Soient  $X_1, \dots, X_n$  et  $Y_1, \dots, Y_n$  deux échantillons indépendants de fonctions de répartition respectives  $F$  et  $G$ . Considérons les processus empiriques suivants :

$$\bar{\mathbb{F}}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - t)_+ \quad \text{et} \quad \bar{\mathbb{G}}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - t)_+.$$

Pour réaliser le test, nous adoptons la statistique de Kolmogorov-Smirnov calculée à partir des données observées comme suit :

$$\mathbb{K}_n = \sqrt{n} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\bar{\mathbb{F}}_n(t) - \bar{\mathbb{G}}_n(t)|. \quad (3.5)$$

Considérons maintenant les statistiques  $\mathbb{K}_n^{(h)}$ ,  $h = 1, \dots, M$  simulée à l'aide de la méthode des multiplicateurs :

$$\mathbb{K}_n^{(h)} = \sqrt{n} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\bar{\mathbb{F}}_n^{(h)}(t) - \bar{\mathbb{G}}_n^{(h)}(t)|, \quad (3.6)$$

où

$$\bar{\mathbb{F}}_n^{(h)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\xi_i^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} - 1 \right) (X_i - t)_+,$$



et

$$\bar{\mathbb{G}}_n^{(h)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\xi_i^{(h)}}{\bar{\xi}^{(h)}} - 1 \right) (Y_i - x)_+,$$

où  $(X_i - x)_+ = \max\{(X_i - x, 0)\}$  et où  $(Y_i - x)_+ = \max\{(Y_i - x, 0)\}$ . Le calcul détaillé de la valeur critique est présenté au paragraphe suivant.

### Calcul de la valeur critique du test sur l'ordre $\prec_{2-icx}$

L'évaluation de la valeur critique associée au test d'hypothèse (3.2) est basée sur la statistique de test de Kolmogorov-Smirnov  $\mathbb{K}_n$  définie par la formule (3.5) ainsi que les statistiques  $\mathbb{K}_n^{(1)}, \dots, \mathbb{K}_n^{(M)}$  simulées par la méthode des multiplicateurs données par la formule (3.6). La valeur critique est donnée par la formule suivante ;

$$p = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^M \mathbb{I}(\mathbb{K}_n^{(h)} > \mathbb{K}_n).$$

Les étapes principales permettant d'obtenir la valeur critique relative au test (3.2) sont :

- Étape 1 : calculer la statistique de test  $\mathbb{K}_n$  à partir d'échantillons  $X$  et  $Y$  réels ;

$$\mathbb{K}_n = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\bar{\mathbb{F}}_n(t) - \bar{\mathbb{G}}_n(t)|$$

,

- Étape 2 : simuler à l'aide du logiciel MATLAB, par la méthode des multiplicateurs la statistique ;

$$\mathbb{K}_n^{(h)} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\bar{\mathbb{F}}_n^{(h)}(t) - \bar{\mathbb{G}}_n^{(h)}(t)|$$

,

- Étape 3 : calculer ensuite la valeur critique en effectuant la somme suivante à

l'aide du logiciel MATLAB ;

$$p = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \mathbb{I}(\mathbb{K}_n^{(h)} > \mathbb{K}_n)$$

,

- Étape 4 : prendre la décision du rejet ou non de  $\mathcal{H}_0$ .

# Chapitre 4

## Étude de la performance des tests par simulations

L'objectif de ce chapitre est d'illustrer la méthode décrite précédemment permettant de tester les hypothèses  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  des ordres stochastiques  $\prec_{1-icx}$  et  $\prec_{2-icx}$ . Pour se faire, nous allons choisir des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  suivant des lois de probabilités spécifiques. Nous considérons en particulier le cas où  $X$  et  $Y$  suivent les lois normale et exponentielle.

### 4.1 Caractérisation de l'ordre $\prec_{1-icx}$ pour les lois normale et exponentielle

Ci-dessous nous caractérisons de l'ordre stochastique  $\prec_{1-icx}$  lorsque  $X$  et  $Y$  suivent la loi normale.

**Proposition 4.1.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires telles que  $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$*

et  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ , alors

$$X \prec_{1-icx} Y \iff \mu_1 \leq \mu_2 \text{ et } \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2.$$

*Démonstration.* Soit

$$\bar{F}(x) = 1 - \phi\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right) \quad \text{et} \quad \bar{G}(x) = 1 - \phi\left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right)$$

les fonctions de survie de  $X$  et  $Y$ , où  $\phi$  est la fonction de répartition de la loi normale standard  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Alors,

$$\begin{aligned} X \prec_{1-icx} Y &\iff \bar{F}(x) \leq \bar{G}(x) \quad \forall x \\ &\iff 1 - \phi\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right) \leq 1 - \phi\left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right) \quad \forall x \\ &\iff \phi\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right) \geq \phi\left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right) \quad \forall x \\ &\iff \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \geq \frac{x - \mu_2}{\sigma_2} \quad \forall x \\ &\iff \mu_1\sigma_2 - \sigma_2x \leq \sigma_1\mu_2 - x\sigma_1 \quad \forall x \\ &\iff \sigma_1\mu_2 - \mu_1\sigma_2 + x(\sigma_2 - \sigma_1) \geq 0 \quad \forall x \\ &\iff \sigma_2 - \sigma_1 = 0 \text{ et } \sigma_1\mu_2 - \mu_1\sigma_2 \geq 0 \\ &\iff \sigma_2 \geq \sigma_1 \text{ et } \sigma_1\mu_2 \geq \mu_1\sigma_2 \\ &\iff \mu_1 \leq \mu_2 \text{ et } \sigma_1 \leq \sigma_2. \end{aligned}$$

□

Similairement, si les variables aléatoires respectent des lois exponentielles, nous avons le résultat suivant.

**Proposition 4.2.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires telles que  $X \sim \exp(\lambda_1)$  et

$Y \sim \exp(\lambda_2)$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ . Alors

$$X \prec_{1-icx} Y \iff \lambda_1 \geq \lambda_2.$$

*Démonstration.* Rappelons que les fonctions de survie de  $X$  et  $Y$  sont de la forme  $\bar{F}(x) = e^{-\lambda_1 x}$  et  $\bar{G}(x) = e^{-\lambda_2 x}$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} X \prec_{1-icx} Y &\iff \bar{F}(x) \leq \bar{G}(x) \\ &\iff e^{-\lambda_1 x} \leq e^{-\lambda_2 x} \quad \forall x \geq 0 \\ &\iff -\lambda_1 x \leq -\lambda_2 x \quad \forall x \geq 0 \\ &\iff \lambda_1 \geq \lambda_2. \end{aligned}$$

□

## 4.2 Caractérisation de l'ordre $\prec_{2-icx}$ pour les lois normale et exponentielle

La proposition suivante fournit une condition suffisante sur l'ordre stochastique  $\leq_{2-icx}$  entre deux variables aléatoires positives.

**Proposition 4.3.** *Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires positives de fonctions de survie  $\bar{F}$  et  $\bar{G}$  respectivement, tel que  $E(X) \leq E(Y)$ . S'il existe une constante  $c$  telle que*

$$\bar{F}(x) \geq \bar{G}(x) \quad \text{pour tout } x < c \tag{4.1}$$

et

$$\bar{F}(x) \leq \bar{G}(x) \quad \text{pour tout } x \geq c \tag{4.2}$$

alors

$$X \leq_{2-icx} Y.$$

*Démonstration.* Supposons que (4.1) et (4.2) sont satisfaites et montrons que  $X \leq_{2-icx} Y$  ou d'une manière équivalente

$$\int_x^\infty \bar{F}(t)dt \leq \int_x^\infty \bar{G}(t)dt \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

De (4.2), il est clair que pour tout  $x \geq c$ ,

$$\int_x^\infty \bar{F}(t)dt \leq \int_x^\infty \bar{G}(t)dt.$$

Montrons maintenant que cette inégalité reste valable pour  $x < c$ . À cet effet, considérons la fonction

$$\phi(x) = \int_x^\infty \bar{F}(t)dt - \int_x^\infty \bar{G}(t)dt.$$

$\phi(x)$  est décroissante sur l'intervalle  $(-\infty, c)$ , car  $\phi'(x) = \bar{G}(x) - \bar{F}(x)$  est négative pour tout  $x < c$ . Par conséquent,

$$\phi(x) \leq \phi(0) = E(X) - E(Y) \leq 0 \quad \text{pour tout } x < c,$$

ce qui implique le résultat. □

### 4.3 Simulation 1

Pour illustrer la méthode des multiplicateurs décrite au chapitre 3, nous allons effectuer un test de puissance sur des échantillons  $X$  et  $Y$  suivant différentes lois avec des paramètres variants. Sur 10 000 tests, nous allons calculer et afficher dans plusieurs tables la proportion de rejet de l'hypothèse nulle  $\mathcal{H}_0$ . Les tailles des échantillons pour

les deux échantillons seront identiques et fixées à 50, 100 et 200. Les tests ont tous été effectués à partir du logiciel MATLAB

Comparons d'abord des lois normales dont on fait varier la moyenne de la distribution  $X$ . Lorsque la variance est fixée, on peut prédire que le rejet de  $\mathcal{H}_0$  sera systématique lorsque  $\mu_X \leq \mu_Y$ , qu'il soit de 5% lorsque  $\mu_X = \mu_Y$  et qu'il tendra vers 100% lorsque  $\mu_X \geq \mu_Y$ . Dans la table 1, on compare l'échantillon  $X$  de paramètre  $\mu_X$  variable à un échantillon  $Y$  qui suit une loi normale de moyenne 0 et de variance 1 et on indique la proportion de rejet de l'hypothèse nulle.

$Y \sim N(0, 1), s = 1$				
$\mu$	$\sigma^2$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
-0,2	1	0,0090	0,0030	0
-0,1	1	0,0240	0,0130	0,0120
0	1	0,0550	0,0430	0,0570
0,1	1	0,1380	0,1680	0,2280
0,2	1	0,2330	0,3620	0,5340
0,3	1	0,3790	0,5760	0,8270

TABLE 4.1 – Proportion de rejet de l'hypothèse nulle pour  $X \sim N(\mu, 1)$  et  $Y \sim N(0, 1)$ , 10 000 itérations,  $s = 1$

On constate dans la table 4.1 que la proportion de rejet de l'hypothèse nulle avoisine les 5% lorsque la moyenne de la loi normale que suit la variable  $X$  est égale à celle de la loi normale que suit  $Y$ . Il s'agit de la proportion attendue qui accepte l'hypothèse nulle environ 95% du temps. Par contre, on obtient un net rejet de l'hypothèse nulle lorsque la moyenne de la loi normale que suit  $X$  est supérieure à celle de la loi normale que suit  $Y$ . Évidemment, les résultats sont plus concluants avec des échantillons plus grands.

Ensuite, on compare les lois normales dont on fait varier le paramètre  $\sigma^2$  pour l'échantillon  $X$ . L'échantillon  $Y$  reste fixé avec une moyenne de 0 et une variance de 0. Puisque les fonctions de répartition des variables aléatoires de variances différentes vont nécessairement se croiser, l'ordre stochastique deviendra difficile à prédire pour

les variances différentes. Les résultats obtenus sont présentés à la table 4.2.

$Y \sim N(0, 1), s = 1$				
$\mu$	$\sigma^2$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
0	0,5	0,4310	0,7540	0,9750
0	0,75	0,0980	0,1480	0,2750
0	1,25	0,0890	0,0430	0,0570
0	1,5	0,1630	0,3010	0,5760
0	2	0,4130	0,7650	0,9800

TABLE 4.2 – Proportion de rejet de l’hypothèse nulle pour  $X \sim N(0, \sigma^2)$  et  $Y \sim N(0, 1)$ , 10 000 itérations,  $s = 1$

On constate que le test d’ordre 1 n’est pas assez puissant pour établir une conclusion sur l’ordre stochastique entre les variables  $X$  et  $Y$ . C’est pourquoi nous devons passer à l’ordre  $s = 2$  qui est moins contraignant, car il ne nécessite pas que les variances soient égales.

## 4.4 Simulation 2

Considérons des échantillons de variables aléatoires  $X$  et  $Y$  lorsque  $s = 2$  dans le cadre de tests avec les multiplicateurs. Dans la table 4.3, les variances de  $X$  et de  $Y$  restent fixées à 1 et la moyenne de  $X$  varie. On s’attend exactement aux mêmes résultats que ceux de la table 4.1.

Comme prévu, on accepte fortement l’hypothèse nulle lorsque  $\mu_X \leq \mu_Y$ , on accepte à 5% lorsque  $\mu_X = \mu_Y$  et on rejette fortement  $\mathcal{H}_0$  pour  $\mu_X \geq \mu_Y$ .

À la table 4.4, la simulation a été faite avec des échantillons distribués  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  et  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$  lorsque  $s = 2$  dans le cadre du test des multiplicateurs. C’est donc le cas où  $\mu_X = \mu_Y$ .



$Y \sim N(0, 1), s = 2$				
$\mu$	$\sigma^2$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
-0,2	1	0,0010	0,0020	0
-0,1	1	0,0140	0,0130	0,0040
0	1	0,0590	0,0420	0,0510
0,1	1	0,1320	0,1880	0,2420
0,2	1	0,2820	0,4290	0,6410
0,3	1	0,4480	0,6710	0,9150

TABLE 4.3 – Proportion de rejet de l’hypothèse nulle pour  $X \sim N(\mu, 1)$  et  $Y \sim N(0, 1)$ , 10 000 itérations,  $s = 2$ 

$Y \sim N(0, 1), s = 2$				
$\mu$	$\sigma^2$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
0	0,5	0,0640	0,0520	0,0460
0	0,75	0,0540	0,0580	0,0600
0	1,25	0,0640	0,0850	0,1410
0	1,5	0,1060	0,2150	0,4440
0	2	0,2800	0,5900	0,9510

TABLE 4.4 – Proportion de rejet de l’hypothèse nulle pour  $X \sim N(0, \sigma^2)$  et  $Y \sim N(0, 1)$ , 10 000 itérations,  $s = 2$ 

On décèle alors l’ordre qui se stabilise, basé sur la comparaison des variances des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . La proportion de rejet du test augmente lorsque la variance de  $X$  dépasse celle de  $Y$ .

## 4.5 Simulation 3

Considérons maintenant deux échantillons qui suivent de lois exponentielles de paramètres différents. La table 4.5 ci-dessous montre toujours la proportion de rejet de l’hypothèse nulle. La variable  $Y$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 1$  et on fait varier le paramètre  $\lambda$  de la variable  $X$ .

On constate que les résultats, tels qu’attendus, présentent un rejet de  $\mathcal{H}_0$  presque

$Y \sim \exp(1), s = 1$			
$\lambda$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
0,7	0,0031	0,0005	0
0,8	0,0086	0,0022	0,0006
0,9	0,0225	0,0148	0,0068
1,0	0,0589	0,0542	0,0543
1,1	0,1137	0,1460	0,1885
1,2	0,1923	0,2821	0,4240
1,3	0,2888	0,4530	0,6792

TABLE 4.5 – Proportion de rejet de l’hypothèse nulle pour  $X \sim \exp(\lambda)$  et  $Y \sim \exp(1)$ , 10 000 itérations,  $s = 1$ .

nulle pour  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  et un rejet de plus en plus grand à mesure que  $\lambda_1$  s’éloigne de  $\lambda_2$ . Des résultats aussi concluants que dans la table 4.5 sont constatés à la table 4.6 où le test a été fait avec les mêmes paramètres qu’à la table 4.5, mais dans le cas de  $s = 2$ .

$Y \sim \exp(1), s = 2$			
$\lambda$	$n = 50$	$n = 100$	$n = 200$
0,7	0,0006	0,0000	0,0000
0,8	0,0031	0,0008	0,0002
0,9	0,0178	0,0099	0,0048
1,0	0,0520	0,0488	0,0492
1,1	0,1223	0,1618	0,2412
1,2	0,2285	0,3551	0,5732
1,3	0,3617	0,5743	0,8313

TABLE 4.6 – Proportion de rejet de l’hypothèse nulle pour  $X \sim \exp(\lambda)$  et  $Y \sim \exp(1)$ , 10 000 itérations,  $s = 2$ .

Puisque la loi exponentielle n’admet qu’un seul paramètre et que les moyennes sont ordonnées, les conclusions des tests étaient prévisibles tant pour  $s = 1$  que pour  $s = 2$ . On constate que pour des moyennes identiques, l’hypothèse nulle est rejetée 5% du temps. La proportion de rejet est presque nulle pour  $\mu_X \leq \mu_Y$  et est de plus en plus élevée pour  $\mu_X \geq \mu_Y$ .

Les simulations effectuées appuient l’efficacité du test statistique visant à comparer l’ordre de deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Il

serait intéressant, en extension à ce mémoire, de tester la validité du test pour des variables indépendantes suivant des lois différentes. Il pourrait être enrichissant également de faire le test sur de vrais jeux de données et vérifier si, avec l'ordre 1 ou l'ordre 2, il serait possible de prédire un ordre entre les variables aléatoires authentiques.

# Conclusion

Bien que la moyenne et la variance soient des mesures populaires et rapides pour comparer l'ordonnement de 2 variables aléatoires, ces concepts ont des limites. Il est donc nécessaire d'approfondir et de raffiner les outils de comparaison de la variabilité, d'où le développement de la théorie des ordres stochastiques qui a beaucoup évolué depuis une quarantaine d'années. Dans ce mémoire, on a d'abord fait une révision et une revue de littérature sur les notions de probabilités, de lois de probabilités et de la notion d'ordre stochastique qui sont nécessaires au développement d'un nouveau test statistique permettant d'ordonner les variables aléatoires. On a obtenu la convergence en loi d'un processus empirique qui sous-tend chacune des statistiques de test proposées. Ensuite, le but principal a été de développer judicieusement la méthode des multiplicateurs afin de calculer les p-valeurs des tests pour l'ordre  $s$ -convexe. Le test s'avère être un complément à l'article de Baringhaus et Grübel.

Les simulations à l'aide de variables qui suivent des lois normales et exponentielles montrent l'efficacité de ce test pour  $s = 1$  et  $s = 2$ . Les proportions d'acceptation de l'hypothèse nulle sont très éloquentes et sont opérationnelles en comparant des variables aléatoires de mêmes lois pour lesquelles on modifie la variance. Les tests ont été faits avec plusieurs tailles d'échantillons différentes et les résultats ont été illustrés.

Les tests ont été développés pour les ordres  $s = 1$  et  $s = 2$ . Il aurait été intéressant de généraliser le test statistique pour tout  $s$ , afin que le test soit efficace pour la comparaison de n'importe quelle distribution de variables aléatoires. Il serait également intéressant de comparer des lois de probabilité différentes et de faire le test avec des données réelles.

# Bibliographie

- [1] V. Alba Fernández, M. D. Jiménez Gamero, and J. Munoz García. A test for the two-sample problem based on empirical characteristic functions. *Comput. Statist. Data Anal.*, 52(7) :3730–3748, 2008.
- [2] Caumaartin Skeene Audet, Boucher. *Probabilités et statistiques, 2e édition*. Gaëtan Morin Editeur, Montréal, 1993.
- [3] Ludwig Baringhaus and Ridolf Grubel. Nonparametric two-sample tests for increasing convex order. *Bernoulli*, 15(1) :99–123, 2009.
- [4] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley and Sons, Inc., New York, second edition, 1999. A Wiley-Interscience Publication.
- [5] George Casella and Roger L. Berger. *Statistical inference*. The Wadsworth and Brooks/Cole Statistics/Probability Series. Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software, Pacific Grove, CA, 1990.
- [6] Monroe D. Donsker. An invariance principle for certain probability limit theorems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, No. 6 :12, 1951.
- [7] R.M. Dudley. *Real Analysis and Probability, 2nd edition*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2002.
- [8] Johan Jensen. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Math*, 30(1) :175–193, 1906.
- [9] Donald E. Knuth. *The art of computer science programming, vol. 2, 3rd edition*. The art of computer science programming. Addison-Wesley Professional, 1998.

- [10] M.R. Kosorok. *Introduction to empirical processes and semiparametric inference*. Springer Verlag, 2008.
- [11] Mhamed Mesfioui and Jean-François Quessy. Bounds on the value-at-risk for the sum of possibly dependent risks. *Insurance : Mathematics and Economics*, 37(1) :135–151, 2005.
- [12] Aad W. van der Vaart and Jon A. Wellner. *Weak convergence and empirical processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1996. With applications to statistics.